ISPITIVANJE HOMOGENOSTI REZULTATA MJERENJA

Zdravko Kapović, Ante Marendić, Tomislav Džapo[1]

[1]*Geodetski fakultet Sveučilišta u Zagrebu (e-mail: zkapovic@geof.hr, amarendic@geof.hr)*

Sažetak. *Svaki izgrađeni objekt podliježe pomacima i deformacijama. Vrijednosti (veličine), smjer i karakter pomaka su najmjerodavniji pokazatelji ponašanja svakog izgrađenog objekta. A pomaci mogu biti neopasni i tolerantni te ozbiljni i kritični. Koji se pomaci mogu smatrati tolerantnima a koji ne, može se utvrditi jedino na osnovu kvalitetno obavljenih mjerenja te cjelovito provedenom obradom podataka mjerenja. I zato je, prije bilo kakve interpretacije rezultata određivanja pomaka, potrebno ispitati kvalitetu rezultata mjerenja. Treba ispitati ima li u rezultatima mjerenja grubih pogrešaka i jesu li mjerenja u svim serijama iste preciznosti. U ovom će se radu izložiti postupak ispitivanja homogenosti rezultata mjerenja te postupak homogenizacije.*

Ključne riječi: *pomak, homogenost mjerenja, statistički testovi*

1 UVOD

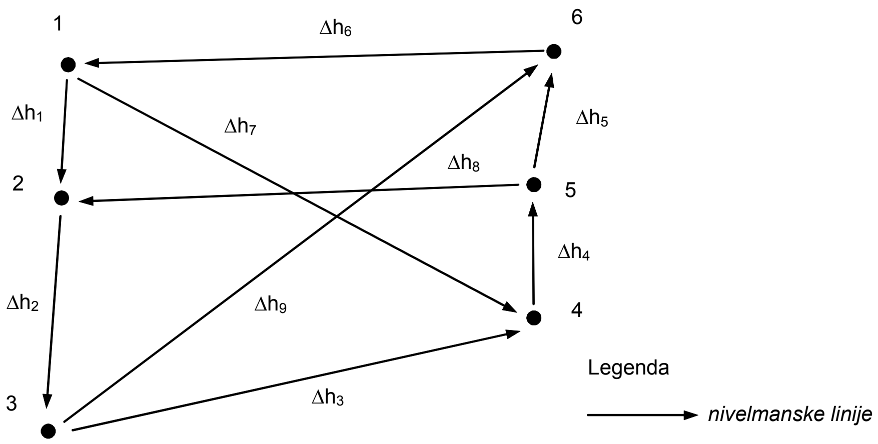
Geodetska mjerenja pomaka obuhvaćaju sva mjerenja u svrhu određivanja promjene oblika objekta ili tla pod utjecajem vanjskih ili unutarnjih sila. Objekt se idealizira određenim brojem točaka čiji se položaj određuje u odnosu na referentnu ili osnovnu geodetsku osnovu izvan područja mogućih pomaka. Geodetskim metodama određuju se (mjere) promjene položaja pojedinih točaka na objektu, a deformacija se može utvrditi na temelju rezultata mjerenja pomaka. Stvarno ponašanje objekta može se utvrditi samo dobro osmišljenim i kvalitetno izvedenim opažanjima, te stručnom obradom podataka.

Pod pojmom ***pomaka*** podrazumijeva se prostorne promjene mjesta (položaja) pojedine točke na objektu ili tlu. Iz navedene definicije dade se zaključiti da se pomak može odrediti nakon najmanje dvije serije mjerenja. Pri tome se nastoji postići ista preciznost mjerenja u svim serijama. Opravdanost konstatacije o "istoj preciznosti" potrebno je i argumentirati. Statističkim testovima provjerava se homogenost mjerenja, odnosno provjerava se jesu li sva mjerenja iste preciznosti. Za ispitivanje homogenosti mjerenja između dviju serija poslužila je tzv testna, odnosno ispitna nivelmanska mreža.

2 ISPITNA NIVELMANSKA MREŽA

Ispitna nivelmanska mreža od šest repera stabilizirana je za potrebe studentskih vježbi na srednjoškolskom igralištu pored Geodetskog fakulteta (Slika 1). Od nekoliko serija mjerenja, koje su obavili studenti u različito vrijeme, različitim instrumentima i različiti opažači, određene su dvije serije koje će poslužiti za ispitivanje preciznosti, odnosno homogenosti rezultata mjerenja.

Rezultati mjerenja (visinske razlike) daju se u tablici 1.



Slika 1. Skica nivelmanske mreže

Tablica 1. Podaci mjerenja visinskih razlika u pojedinim serijama

Visinske razlike (m)	Serija		Udaljenosti (m)
	I.	II.	
Δh_1	-0,0008	-0,0020	29
Δh_2	0,1222	0,1230	40
Δh_3	0,0278	0,0270	100
Δh_4	-0,1418	-0,1410	16
Δh_5	0,2344	0,2350	25
Δh_6	-0,2414	-0,2420	97
Δh_7	0,1488	0,1480	113
Δh_8	-0,0080	-0,0070	107
Δh_9	0,1200	0,1210	109

Nakon što je utvrđeno da u navedenim podacima mjerenja nema grubih pogrešaka, provedeno je ispitivanje jesu li mjerenja, u obje serije, iste preciznosti.

U tu svrhu služimo se različitim testovima (F-test, Bartlettov, Cochranov) kojima se provjerava homogenost varijanci. Na osnovi uspoređivanja izračunate i teorijske vrijednosti test veličine, prihvaćaju se ili odbacuju postavljene hipoteze:

- nulta hipoteza – varijance su jednake, homogene
- alternativna hipoteza - varijance su različite, nehomomgene.

Nakon što se izračunaju procijenjeni faktori varijance (σ^2), statistička jednakost dviju varijanci provjerava se F – testom.

$$F = \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \qquad (\sigma_1 > \sigma_2) \tag{1}$$

ili

$$F = \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} \qquad (\sigma_2 > \sigma_1) \tag{2}$$

Za odabranu razinu signifikantnosti (obično α = 0,05) i stupnjeva slobode (f), iz tablica, koje su sastavni dio svih statističkih udžbenika, očita se teorijska vrijednost:

$$F_{f_1, f_2, 1-\alpha}\,. \tag{3}$$

Ako je

$$F < F_{f_1, f_2, 1-\alpha} \tag{4}$$

prihvaća se nulta hipoteza, što znači da među varijancama nema signifikantnih razlika. U protivnom, odbacuje se nulta a prihvaća alternativna hipoteza. Smatra se da su mjerenja različite preciznosti te nisu izravno pogodna za daljnju analizu. Kako bi se mogla koristiti za daljnju analizu, trebalo bi izvršiti homogenizaciju rezultata mjerenja.

3 HOMOGENIZACIJA REZULTATA MJERENJA

Na temelju podataka o ocjeni točnosti i prekobrojnim mjerenjima nivelmanske mreže na srednjoškolskom igralištu (tablica 2) provedeno je ispitivanje homogenosti mjerenja pomoću F – testa.

Tablica 2. Podaci za analizu

$\sigma_{0,1} = 0.155$	$\sigma_{0,2} = 0.790$
$f_1 = 4$	$f_2 = 4$

$$F = \frac{s_{0,1}^2}{s_{0,2}^2} = 26{,}06 > F_{4,4,0.95} = 6{,}39$$

Kako se iz rezultata testa vidi razlike među varijancama su signifikantne što znači da mjerenja nisu homogena, odnosno nisu iste točnosti. Potrebno je izvršiti homogenizaciju rezultata mjerenja.

3.1 Homogenizacija mjerenja iteracijom

Prema (Bilajbegović i dr. 1992., Kapović 1993, Welsch 1987.) funkcionalni i stohastički modeli glase:

$$E(l) = A \cdot x \tag{5}$$

$$C = \sigma^2 \cdot P^{-1} \tag{6}$$

Općenito, kad imamo više grupa heterogenih mjerenja, stohastički model glasi:

$$C_l = \sigma_0^2 \cdot Q_l = \sigma_1^2 \cdot Q_1 + \ldots.. + \sigma_c^2 \cdot Q_c = \sigma_1^2 \cdot P_1^{-1} + \ldots.. + \sigma_c^2 \cdot P_c^{-1}. \tag{7}$$

Izračuna se matrica kofaktora popravaka:

$$Q^v = \begin{bmatrix} Q_{1,1}^v & Q_{1,2}^v \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot & Q_{1,c}^v \\ \vdots & & \\ \vdots & & \\ Q_{c,1}^v & Q_{c,2}^v \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot & Q_{c,c}^v \end{bmatrix} \tag{8}$$

gdje su:

$$Q_{ii}^v = Q_i - A_i Q_x A_i^t \qquad i = 1,\ldots\ldots,c$$

$$Q_{ij}^v = -A_i Q_x A_j^t \qquad i,j = 1,\ldots\ldots,c, i \neq j$$

Kako je

$$v_j^t P_i v_i = \sum_{j=1}^{c} trag\left[P_j \cdot Q_{ji}^v \cdot P_i \cdot Q_{ij}^v\right] \cdot \sigma_j^2 \tag{9}$$

matrični prikaz izraza (9) glasi:

$$\begin{bmatrix} v_1^t P_1 v_1 \\ \\ \\ v_c^t P_c v_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_{11} & \cdots\cdots & t_{1c} \\ \vdots & & \\ \vdots & & \\ t_{c1} & \cdots\cdots & t_{cc} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sigma_1^2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \sigma_c^2 \end{bmatrix}. \tag{10}$$

Ako uvedemo oznake:

$$\begin{bmatrix} v_1^t P_1 v_1 \\ \\ \\ v_c^t P_c v_c \end{bmatrix} = V, \qquad \begin{bmatrix} t_{11} & \cdots\cdots & t_{1c} \\ \vdots & & \\ \vdots & & \\ t_{c1} & \cdots\cdots & t_{cc} \end{bmatrix} = B, \qquad \begin{bmatrix} \sigma_1^2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \sigma_c^2 \end{bmatrix} = \sigma^2 \tag{11}$$

tada izraz (10) glasi:

$$V = B \cdot \sigma^2$$

Zadatak treba rješavati metodom iteracije. U prvoj iteraciji sume $v_i^t P_i v_i$ uzimaju se iz pojedinačnog izjednačenja heterogenih mjerenja. Riješivši sustav dobije se vektor procijenjenih varijanci σ^2 :

$$\sigma^2 = B^{-1} \cdot V\ . \tag{12}$$

U drugoj, i svakoj daljnjoj iteraciji, B ostaje nepromijenjena, a računa se vektor V, tj.

$$v_i^t P_i v_i = \sigma_i^2 \cdot (n_i - u_i) \tag{13}$$

gdje je $(n_i - u_i)$ broj prekobrojnih mjerenja. S novim vektorom V ponovo se izračuna vektor procijenjenih varijanci σ^2. Postupak se ponavlja sve dok komponente vektora σ^2, u postupku iteracije, ne postanu jednake, tj. dok $\sigma_i^2 / \sigma_j^2 \Rightarrow 1$. Tada se dobiva, konačno, kovarijacijska matrica mjerenih veličina:

$$C_l = \sigma_0^2 \cdot Q_l = \sigma_1^2 \cdot Q_1 + ... + \sigma_c^2 \cdot Q_c \tag{14}$$

koja se koristi za daljnja izjednačenja.

Kako se navedenim postupkom homogenizacije rezultata mjerenja ispitne mreže, ni nakon 20 iteracija (tablica 3 prikazuje samo 10 iteracija) nisu dobili očekivani rezultati, prešlo se je na jednu drugu, jednostavniju i (pokazat će se) učinkovitiju metodu homogenizacije (Leonharg 1987., Cigrovski-Detelić 1991).

Tablica 3. Rezultati iteracije

Iteracija	σ_1^2	σ_2^2
1.	0,0239	0,6237
2.	0,0179	0,4677
3.	0,0135	0,3508
4.	0,0101	0,2631
5.	0,0076	0,1973
6.	0,0057	0,1480
7.	0,0043	0,1110
8.	0,0032	0,0832
9.	0,0024	0,0624
10.	0,0018	0,0468

3.2 Homogenizacija mjerenja pomoću težina

Opće je poznato je da se težina mjerenja definira kao neimenovani broj obrnuto razmjeran (proporcionalan) procijenjenoj varijanci tog mjerenje tj.

$$P_i = \frac{k}{\sigma_i^2} \tag{15}$$

gdje je k faktor proporcionalnosti. Taj faktor, znači, može biti bilo koji broj, pa prema tome i $k = \sigma_1^2$. U razmatranom primjeru imamo dvije serije nehomogenih mjerenja. Ponovit će se izjednačenje ali sada, s različitim matricama težina, tj.

$$P_1 = \frac{\sigma_1^2}{\sigma_1^2} = 1$$

$$P_2 = \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$$

Na ovaj način dobivene su nove vrijednosti standardnih odstupanja (tablica 4) te izvršila provjera homogenosti varijanci nakon homogenizacije

Tablica 4. Podaci za analizu

$\sigma_{0,1} = 0.133$	$\sigma_{0,2} = 0.131$
$f_1 = 4$	$f_2 = 4$

$$F = \frac{\sigma_{0,1}^2}{\sigma_{0,2}^2} = 1{,}04 < F_{4,4,0.95} = 6{,}39$$

Kako razlike među varijancama nisu signifikantne znači da su mjerenja iste preciznosti te se mogu koristiti za računanje pomaka, odnosno interpretaciju rezultata mjerenja.

4 ZAKLJUČAK

Kao i pri svim geodetskim radovima, tako i pri određivanju pomaka i deformacija građevinskih objekata, vrlo je važno imati kvalitetne podatke mjerenja. Kvaliteta podataka se provjerava na dobro poznate, uobičajene, načine. Pri određivanju pomaka i deformacija, osim uobičajene provjere kvalitete rezultata mjerenja, potrebno je ispitati i jesu li mjerenja u svim serijama iste preciznosti. U slučaju da mjerenja nisu iste preciznosti, treba izvršiti homogenizaciju mjerenja. Moramo konstatirati da postupak homogenizacije mjerenja metodom iteracije, već u nekoliko navrata, ne daje dobre rezultate, što ukazuje da bi ga trebalo temeljito „pretresti“. Homogenizacija pomoću težina daje zadovoljavajuće rezultate. Međutim, treba napomenuti da se postupak homogenizacije pomoću težina, teorijski, može primjenjivati onda kada postoji samo jedna vrsta mjerenja, jedan način određivanja visina (samo geometrijski ili samo trigonometrijski). Nakon konstatacije „o mjerenjima iste preciznosti“ mogu se računati i interpretirati veličine pomaka te zaključivati o stvarnom ponašanju ispitivane konstrukcije.

LITERATURA

Bilajbegović, A., Solarić, M., Bačić, Ž. (1992): *Mogućnost primjene GPS u gradskim mrežama*, Geodetski list 2, Zagreb

Cigrovski Detelić, B. (1991): *Kritički osvrt na ocjenu točnosti mjerenja u dijelu triangulacije 2. reda Jugoslavije*, Geodetski list 1-3, Zagreb

Kapović, Z. (1993): *Prilog određivanju i analizi pomaka i deformacija mostova s posebnim osvrtom na temperaturne utjecaje*, disertacija, Geodetski fakultet Sveučilišta u Zagrebu

Leonhard, T. (1987): *Berchnung von vertukalen krustenbewegungen im Hannover model*, Hannover

Welsh, W. (1987): *Lectures Notes in Earth Sciences*, Geneva

TESTING THE HOMOGENEITY OF MEASUREMENT

Abstract. *Every constructed object is exposed to various shifts and deformations. The most proper indicators of the constructed object behavior are the values, direction and character of the measured shifts. Shifts can be classified as reliable and acceptable as well as a significant and critical. Only based on quality performed measurements and complete analysis of the measured data we can determine which shift can be consider as acceptable. That is the reason why we should examine quality of the measurement results before any interpretation of the results. We have to examine the existence of any gross errors and the homogeneity of measurements in all series. Methods for testing the homogeneity of measurement and homogenization of measurements will be presented in this paper*

Key words: *shift, homogeneity of measurements, statistical tests*