

---

# MJERENJE POMAKA I DEFORMACIJA KONSTRUKCIJA POMOĆU ELEKTRONSKIH TAHIMETARA

Boštjan Kovačič<sup>1</sup>, Rok Kamnik<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Univerza v Mariboru, Fakulteta za gradbeništvo (e-mail: bostjan.kovacic@uni-mb.si)

<sup>2</sup>Univerza v Mariboru, Fakulteta za gradbeništvo (e-mail: rok.kamnik@uni-mb.si)

**Sažetak.** U praksi se često susrećemo s određivanjem geometrijskih osobina objekata i njihovih promjena. U užem značenju to su procesi određivanja promjena položaja i oblika objekata, s obzirom na okolinu i zavisnosti od vremena. Deformacije objekata nastaju zbog vanjskih i unutarnjih utjecaja kao što su sila vjetra, djelovanje temperaturnih promjena, tektonski i seizmološki utjecaji, promjena u visini podzemne vode, statička i dinamička opterećenja objekata... Određivanje pomaka i deformacija objekata u prostoru može se izvoditi različitim metodama i različitim instrumentima. U posljednje vrijeme najčešće se koristi geodetske metode mjerenja pomoću elektronskih tahimetara odnosno mjernih stanica.

**Ključne riječi:** inženjerska geodezija, pomaci i deformacije, trigonometrija

## 1 UVOD

Znanstvena disciplina o ispitivanju konstrukcija i objekata formirana je nešto kasnije od ostalih disciplina u građevinarstvu. Ipak, neki posebni slučajevi ispitivanja objekata postojali su u vrlo davna doba. Prva ispitivanja konstrukcija datiraju iz XV. stoljeća. U to vrijeme je Leonardo da Vinci prvi izvršio ispitivanje različitih oblika konstrukcija. Prvi radovi i oblici ispitivanja sigurnosti greda bili su izvršeni od strane Galileija u XVI. stoljeću. On je pokušao otkriti zavisnost između utjecaja sila na konstrukciju i njenog proračuna. U to vrijeme još nije bio poznat zakon o elastičnosti konstrukcije, zato je zavisnost koju je postavio Galilei, iako je bila principijelno pravilno postavljena, sadržavala brojne netočnosti. Eksperimentalne metode ispitivanja konstrukcija u početku zasnivale su se na teorijskom proračunu koji opisuje proces deformacija i lom pod djelovanjem opterećenja. S razvojem kvantitativnih znanosti i u zadnjih 30 godina s ubrzanim razvojem informatike, analizom pomaka i deformacija bavili su se brojni stručnjaci koji su svoja dostignuća opisali u većem broju članaka i knjiga.

---

## 2 POMACI I DEFORMACIJE KONSTRUKCIJA

Pomaci i deformacije nastaju zbog vanjskih i unutarnjih utjecaja kao što su sila vjetrova, djelovanje temperaturnih promjena, tektonski i seizmološki utjecaji, promjena u visini talne (podzemne) vode, statička i dinamička opterećenja objekata, a očituju se u obliku progiba, nagiba, zaokreta, iskrivljenja građevine, a moguća su i oštećenja u obliku pukotina, pa i lomova.

Ispitivanje konstrukcije ili objekta u obliku mjerenja pomaka i deformacija je određivanje promjene položaja i oblika objekta, s obzirom na okolinu, u zavisnosti od vremena.

Osnovni pokazatelji za interpretaciju rezultata mjerenja su karakter, smjer i veličina pomaka i deformacija. Dijelimo ih prema karakteru na ravnomjerne i neravnomjerne pomake te elastične i plastične deformacije, prema promjeni smjera na horizontalne i vertikalne a prema veličini na neopasne, tolerantne, ozbiljne i kritične.

Mjerenje pomaka i deformacija potrebno je zbog ocjene stanja konstrukcije, ocjene stanja objekta vezanih ili s procesom građevinske proizvodnje ili sa sanacijom ili s pojačanjem konstrukcije te provjere točnosti teorijskih pretpostavki. Potreba za eksperimentalnim ispitivanjem se javlja u sljedećim slučajevima (Kovačić, 2001.):

- ◆ mogućnosti korištenja konstrukcije u slučaju prekoračenja korisnog opterećenja,
- ◆ ispitivanje trajnosti građevinskih elementa masovne proizvodnje,
- ◆ ispitivanja velikih i specijalnih objekata pri utjecaju korisnog opterećenja,
- ◆ ispitivanja složenog sustava konstrukcije, kao i ispitivanje njene sigurnosti.

Vertikalne pomake možemo izmjeriti na više načina odnosno s više metoda. Koju metodu ćemo rabiti ovisno je od same konstrukcije, predviđene točnosti, predviđenih pomaka, terena u okolini konstrukcije, vanjskih uvijeta, broja osoblja. Mjerenje vertikalnih pomaka najčešće se izvodi pomoću metode geometrijskog nivelmana, a kod većih i viših objekata ova metoda više nam ne može dati rezultata, tako da moramo upotrijebiti neku drugu geodetsku metodu (elektronski tahimetri, GPS, fotogrametrija....) Praksa je pokazala, da je vrlo upotrebljiva metoda trigonometrijskog nivelmana pomoću elektronskih tahimetara. Uz uvažanjem meteoroloških uvijeta, izmjerene dužine i kuta izračuna sa ili koordinate novih točki ili promjenu u visinskom smislu. Na osnovu vertikalnog kuta i duljine te uvažanjem svih parametara i pogrešaka možemo izračunati promjenu  $\Delta H$  pomoću poznate formule (Vodopivec, 1985.):

---


$$\Delta H = S \cdot \operatorname{ctg} Z_A + i_A - l_B + \left( \frac{1 - k_a}{2} \right) \cdot \left( \frac{S^2}{R} \right) + \omega \quad (1)$$

gdje je:

$S$  - dužina

$Z_A$  – vertikalni kut

$i_A$  – visina instrumenta na točki A

$l_B$  – visina prizme na točki B

$k_a$  – koeficijent refrakcije (za Sloveniju  $k_a = 0.13$ )

$R$  – polumjer Zemlje

$\omega$  - korekcijski koeficijent

### 3 POGREŠKA VISINSKE RAZLIKE KOD TRIGONOMETRIJSKOG VISINOMIJERSTVA

U nastavku članka predstaviti ćemo metodu trigonometrijskog nivelmana koju upotrebljavamo kod probnih ispitivanja konstrukcija, odnosno što sve utječe na dobivene rezultate. Kod svake izmjere potrebno je unaprijed izračunati točnost mjerenja, koja se temelji na klasičnim geodetskim radovima gdje se visinska razlika dobije po prije navedenoj formuli.

Kod probnih ispitivanja odnosno kod mjerenja vertikalnih pomaka možemo iz formule 1 ispustiti visinu instrumenta  $i_A$ , pošto mjerimo u relativnom koordinatnom sustavu odnosno u lokalnom sustavu. iz formule možemo izpustiti i visinu prizme  $l_B$ , pošto smo vizirali na retro marke kod kojih se upotrebljava visina 0,0mm. Izmjerene dužine bile su relativno kratke ( $S < 150$  m) pa smo ispustili i korekciju zbog zakrivljenosti Zemlje  $\omega$ .

Tako se može formula 1 zapisati u drugom obliku (Kovačić i Kamnik, 2006.):

$$\Delta H_a = S \cdot \operatorname{ctg} Z_A + \frac{S^2}{2R} - k_a \frac{S^2}{2R} \quad (2)$$

U našem primjeru promjenimo zenitnu dužinu  $s$  vertikalnim kutom i kosu dužinu, tako da formula glasi:

$$\Delta H_a = D_p \cdot \sin \alpha + \frac{D_p^2}{2R} - k_a \frac{D_p^2}{2R} \quad (3)$$

Za promjenljivu veličinu možemo uzeti dužinu  $D_p$ , vertikalni kut  $\alpha$  i koeficijent refrakcije  $k$ . Ako upotrijebimo zakon o srednjim greškama funkcija, dobimo novu funkciju  $m(\Delta H)=f(D, \alpha, k)$

$$m_{\Delta H}^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial D}\right)^2 \cdot m_D^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial \alpha}\right)^2 \cdot m_\alpha^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial k}\right)^2 \cdot m_k^2 \quad (4)$$

gdje je:

$m_{\Delta H}$  – pogreška visinske razlike

$m_D$  – pogreška dužine

$m_\alpha$  – pogreška vertikalnog kuta

$m_k$  – pogreška koeficijenta refrakcije (0,05) (Kovačić i Kamnik, 2006.)

Nakon derivacije dobijemo:

$$\frac{\partial f}{\partial D_p} = \sin \alpha + \frac{D_p}{R} - k_a \frac{D_p}{R} \quad - \text{derivacija po dužini, gdje posljednji član}$$

zanemarimo

$$\frac{\partial f}{\partial \alpha} = D_p \cos \alpha \quad - \text{derivacija po vertikalnom kutu}$$

$$\frac{\partial f}{\partial k} = -\frac{D_p^2}{2R} \quad - \text{derivacija po koeficijentu refrakcije}$$

Iz izračuna se može ispustiti i koeficijent refrakcije pa se uzima u obzir pogreška viziranja, tako da konačna formula glasi:

$$m_{\Delta H}^2 = \left( \sin^2 \alpha + \frac{D_p^2}{R^2} \right) \cdot m_D^2 + \left( D_p^2 \cos^2 \alpha \right) \cdot m_\alpha^2 + m_V^2 \quad (5)$$

Pogreška visinske razlike izračunava se za različite vrijednosti dužina i kutova. Točnije se u nastavku daje samo primjer za najdužu izmjerenu horizontalnu dužinu (136,5432 m) i vertikalni kut (55° 13' 11"), a ostali su izračuni dati u tablici 1.

U formuli (5) pogreška dužine te pogreška vertikalnog kuta izračuna se pomoću vrijednosti proizvođača instrumenata, koje smo upotrijebili u praktičnom primjeru. Tako se izračuna  $m_D$  in  $m_\alpha$ . Točnost mjerenja dužine bila je  $3 \text{ mm} \pm 2 \text{ ppm}$  ( $a \text{ mm} \pm b \text{ ppm}$ ), a točnost mjerenja kutova  $\pm 3''$ .

$$m_D = \sqrt{a^2 + \left( \frac{D_p [m] \cdot b \text{ ppm}}{1000000} \right)^2} = 3,01 \text{ mm}$$

$$m_\alpha = \frac{3''}{206264,8062''} = 1,45 \cdot 10^{-5}$$

$$m_V = \frac{D_p [mm] \cdot 0,15 \text{ mgon}}{63662 \text{ mgon}} = 0,32 \text{ mm}$$

U izračunu pogreške viziranja vrijednost 0,15 mgon, dobili smo pomoću formule  $\frac{c}{u}$ , gdje je  $c$  raspoznavna sposobnost oka (2 – 8 mgon; prosječna vrijednost je 4,5 mgon) i  $u$  povećava dvogledom (u našem primjeru 30x).

Vrijednosti se daju u formuli i dobiju se konačne vrijednosti pogreške visinske razlike:

$$m_{\Delta H}^2 = \sqrt{6,12 \text{ mm}^2 + 1,28 \text{ mm}^2 + 0,10 \text{ mm}^2} = 7,51 \text{ mm}^2 \Rightarrow$$

$$m_{\Delta H} = 2,74 \text{ mm}$$

Vidimo, da na točnost ima najviše utjecaja mjerenja duljine, duljina vizure viziranja i na kraju još vertikalni kut. Ostali izračuni točnosti za različite vrijednosti horizontalnih dužina i kutova dati su u tablici 1:

Tablica 1: Izračun unutrašnje točnosti

Zap. br.	$D_p$ [m]	kut $\alpha$	$m_{\Delta H}$ [mm]
1	5,8474	20° 40' 23"	1,60
2	21,5514	75° 32' 53"	2,91
3	32,8236	55° 18' 17"	2,48
4	50,3400	22° 37' 55"	1,34
5	87,0210	59° 40' 20"	2,67
6	91,7401	28° 54' 53"	1,86
7	114,6949	45° 48' 57"	2,45

Izvor: Izvorna istraživanja autora

Ovdje se iznose rezultati ispitivanja jedne konstrukcije na trasi autoputa Ljubljana – Koper.

Za svaku izmjerenu točku izračunali smo standardno udstupanje. Primjer izračuna dajemo u tablici 2: tri točke na najdužem (i najvišem) polju 4 lijeve konstrukcije, gdje su se očekivali i najveći pomaci.

Tablica 2: Izračunata standardna odstupanja za najduže polje

Točka na potpori lijeve konstrukcije na strani prema Ljubljani

Točka na sredini polja lijeve konstrukcije

podatak [m]	odstupanje [v]	kvadrati odstupanja [vv]		podatak [m]	odstupanje [v]	kvadrati odstupanja [vv]
0,0020	0,0000	0,00000000		0,0412	-0,0004	0,00000016
0,0022	-0,0002	0,00000004		0,0412	-0,0004	0,00000016
0,0022	-0,0002	0,00000004		0,0409	-0,0001	0,00000001
0,0020	0,0000	0,00000000		0,0411	-0,0003	0,00000009
0,0020	0,0000	0,00000000		0,0407	0,0001	0,00000001
0,0018	0,0002	0,00000004		0,0405	0,0003	0,00000009
0,0020	0,0000	0,00000000		0,0410	-0,0002	0,00000004
0,0018	0,0002	0,00000004		0,0404	0,0004	0,00000016
0,0020	0,0000	0,00000000		0,0404	0,0004	0,00000016
0,0020	0,0000	0,00000000		0,0406	0,0002	0,00000004
0,0200	0,0000	0,00000016	ukupno	0,4080	0,0000	0,00000092
0,0020			sredina	0,0408		
	0,000000017		varianca		0,000000102	
	<b>0,00013 m</b> <b>0,13 mm</b>		<b>standardno odstupanje</b>		<b>0,00032 m</b> <b>0,32 mm</b>	

Točka na potpori lijeve konstrukcije na strani prema Kopru

podatak [m]	odstupanje [v]	kvadrati odstupanja [vv]	
0,0080	0,0000	0,00000000	
0,0082	-0,0002	0,00000004	
0,0083	-0,0003	0,00000009	
0,0081	-0,0001	0,00000001	
0,0077	0,0003	0,00000009	
0,0080	0,0000	0,00000000	
0,0084	-0,0004	0,00000016	
0,0078	0,0002	0,00000004	
0,0079	0,0001	0,00000001	
0,0076	0,0004	0,00000016	
0,0800	0,0000	0,00000060	ukupno
0,0080			sredina
	0,000000066		varianca
	<b>0,00026 m</b> <b>0,26 mm</b>		<b>standardno odstupanje</b>

Izvor: Izvorna istraživanja autora

U gornjim tablicama prikazan je primjer izračuna standardnoga odstupanja za polje 4 (potpora, polje, potpora). Standardno odstupanje  $s$  izračunali smo po poznatoj formuli:

$$s = \sqrt{\frac{[vv]}{(n-1)}}$$

gdje je:  $s$  standardno odstupanje,  $vv$  kvadrati odstupanja od sredine i  $n$  broj opažanja.

Ako uzmemo u obzir prije navedeno dostigli smo točnost mjerenja  $\pm 0,2$  mm (srednja vrijednost standardnog odstupanja kod mjerenja vertikalnih pomaka vozne konstrukcije) i  $\pm 0,3$  mm (srednja vrijednost standardnoga odstupanja kod mjerenja vertikalnih pomaka stupova). Standardno odstupanje za izmjerene horizontalne dužine osciliralo je od 0,10 mm do 0,33 mm.

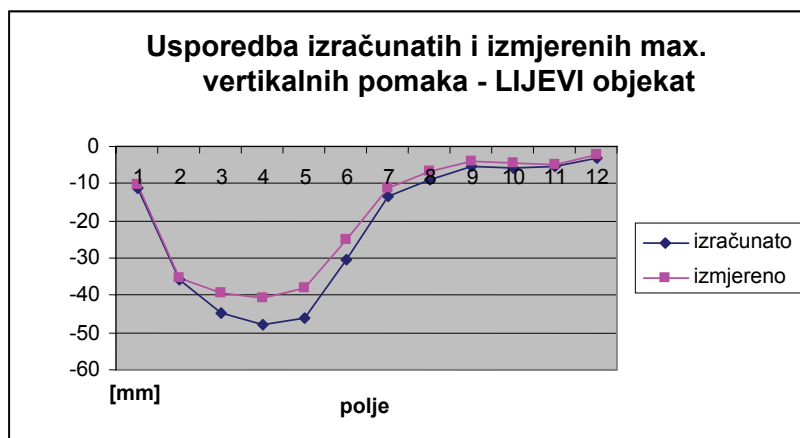
Tablica 3. Podaci za usporedbu izračunatih i izmjerenih vrijednosti

polje broj		konstrukcija			konstrukcija	
		lijeva	desna		lijeva	desna
1	izračunate vrijednosti [mm]	-11,2016	-29,7799	maksimalne izmjerene vrijednosti [mm]	-10,5	-19,5
2		-35,8291	-38,203		-35,4	-33,8
3		-44,9218	-43,3092		-39,5	-40,9
4		-47,854	-45,3349		-40,8	-42,5
5		-46,1175	-44,622		-37,9	-39,7
6		-30,3064	-28,7191		-24,9	-27,4
7		-13,5388	-13,0783		-11	-11,5
8		-8,83822	-8,44403		-6,5	-7,5
9		-5,44881	-5,19805		-3,9	-4,5
10		-5,72538	-5,46094		-4,7	-4
11		-5,273	-5,02672		-5	-4,9
12		-3,0503	-2,90707		-2,1	-2,4

Izvor: Izvorna istraživanja autora

Izračunate i izmjerene vrednosti pomaka za lijevi objekat možemo vidjeti na grafikonu 1. Vidi se da su bili izmjereni vertikalni pomaci ispod izračunatih vrijednosti.

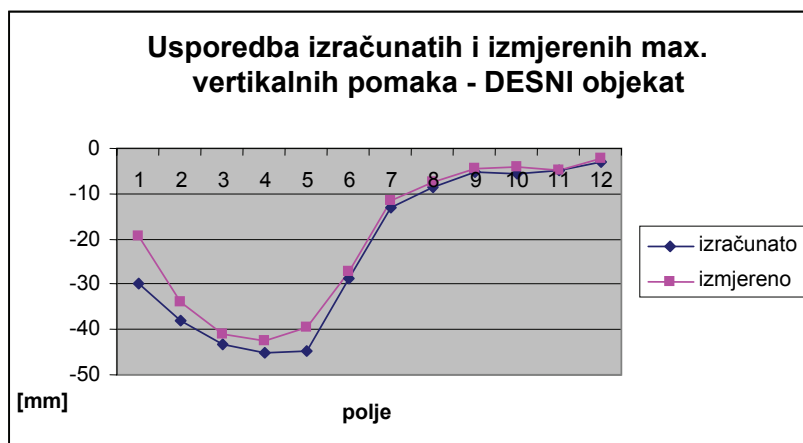
Grafikon 1: Usporedba vrijednosti za lijevi objekat



Izvor: Tablica 3

Izračunate i izmjerene vrednosti pomaka za desni objekat možemo vidjeti na grafikonu 2. Vidi se da su i ovdje bili izmjereni vertikalni pomaci ispod izračunatih vrijednosti.

Grafikon 2: Usporedba vrijednosti za desni objekat

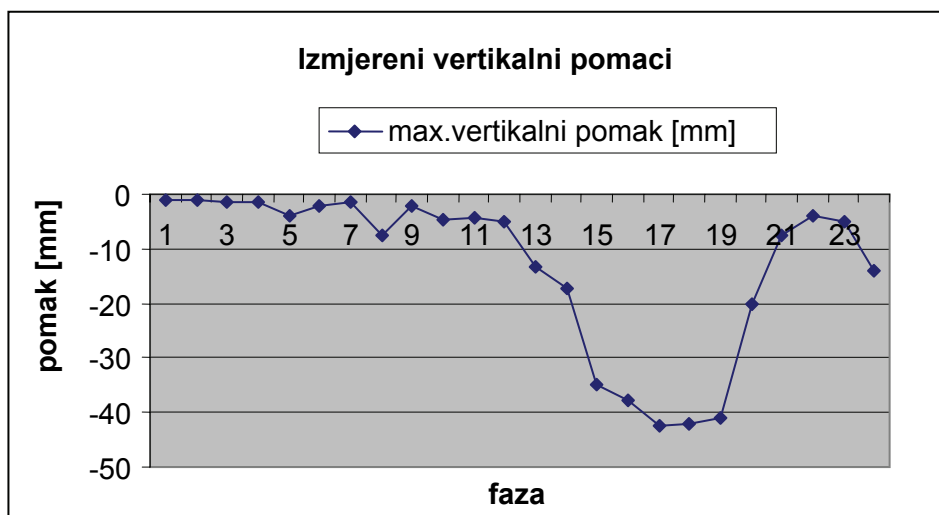


Izvor: Tablica 3

Prema očekivanju izmjerena vrijednost maksimalnih vertikalnih pomaka po pojedinim poljima imala je oblik sinusne krivulje te se povećavala prema dužini polja što se vidi u grafikonu 3.



Grafikon 3: izmjereni maksimalni vertikalni pomaci



Izvor: Izvorna istraživanja autora

#### 4 ZAKLJUČAK

Određivanja vertikalnih pomaka pomoću elektronskih tahimetara se u posljednje vrijeme kod nas najviše upotrebljava. Prednosti ove metode u odnosu na geometrijski nivelman se očituju u tome, da možemo opažati točke na većim dužinama, pored vertikalnih pomaka dobivamo i horizontalne pomake, mjerenje se obavlja brže i što je najvažnije radne rezultate odmah dobivamo na terenu. Tako najveći problem ostaje u operateru i neizbježnim pogreškama koji ga prate.

Iz dobivenih rezultata možemo zaključiti da je upotrebljena metoda kod testa opterećivanja viadukta Črni Kal bila pogodna i precizna. Za test smo upotrijebili 6 instrumenata (totalnih stanica) istoga tipa i proizvođača te iste točnosti. Svako mjerenje izveli smo po iterativnom postupku gdje je bilo 10 iteracija. Broj iteracija mogli bi i povećati čime bi točnost mjerenja povećali, ali smo se zbog veoma kratkoga termina mjerenja odlučili za 10 iteracija. Mogli smo staviti veće retro marke čime bi olakšali viziranje i time dostigli veću točnost, ali smo imali iskusan tim operatera tako da nije bilo takvih problema.

Rezultate istraživanja mogli bi i poboljšati kombinacijom ostalih metoda (s totalnim stanicama, niveliranjem, GPS sustavom) što zbog pomanjkanja vremena i troškova nije bilo moguće. U testiranju bi svi instrumenti i metode dali iste vrijednosti.

---

## LITERATURA:

- Kovačič, B. (2001): *Analiza preciznosti različnih metoda za određivanje vertikalnih mikropomaka objekata*, doktorska disertacija, Zagreb,
- Kovačič, B., Kamnik, R., (2006): *Measurement of displacement and deformations on biggest Slovenian viaduct with particular stress on accuracy calculations*, Allgemeine Vermessungs Nachrichten, 10/2006
- Vodopivec, F., (1985): *Trigonometrično višinomerstvo*, FAGG, Ljubljana,

## MEASUREMENTS OF VERTICAL DISPLACEMENTS AND DEFORMATIONS WITH TOTAL STATIONS AND ACCURACY CALCULATIONS

*Abstract.* In practice we mainly monitor the geometric characteristics and changes of an object. Object monitoring means procedures of determining the changes in object position and shape, with the respect of an environment and weather. The object is influenced by outside and inner influences such as wind, temperature, seismic and tectonic activities, changes in underground water level, object static and dynamic load, etc. There are a lot of methods and instrumentations to determine vertical displacement and deformations of an object in space. Nowadays dominates the use of geodetic method such as trigonometry with total stations.

*Keywords:* engineer geodesy, vertical displacement and deformations, trigonometry